ANALISI DIMENSIONALE NELL'AMBITO DELLA FLUIDODINAMICA

Marco CAPOZZI *

* *Ingegnere Meccanico; Master in "Science in Aerospace Engineering", Mississippi State University (USA)*

INTRODUZIONE

L'analisi dimensionale riveste un ruolo particolare nel campo della fluidodinamica in quanto introduce i mezzi necessari ad effettuare lo studio adimensionalizzato dei fenomeni fluidodinamici. Nell'ambito della fluidodinamica classica l'adimensionalizzazione delle variabili fisiche è utile per isolare parametri (numeri puri) importanti per determinare le caratteristiche di un certo problema. Essa consente, inoltre, di scalare la dimensionalità di un problema, rendendone più semplice la risoluzione o –almeno- l'inquadramento matematico. Inoltre torna utile nella fluidodinamica numerica.
Nel sistema MKS le unità di misura fondamentali sono:

- *Metro*, per le lunghezze;
- *Kilogrammo*, per le masse;
- *Secondo*, per i tempi.

Ci sono poi grandezze di tipo elettrico, ma non interessano la fluidodinamica classica per cui non verranno qua presi in considerazione. Esistono anche grandezze di tipo derivato, quali, ad esempio, il *Newton* per le forze, ma anche velocità, densità, etc. Le grandezze di tipo derivato sono – per l'appunto – derivate da quelle fondamentali. Da un punto di vista di analisi dimensionale le grandezze fondamentali vengono espresse in termini di lunghezza [L], tempo [T], massa [M].
Alla luce di questa definizione, le grandezze di tipo derivato di uso più comune avranno espressione data dal prodotto delle grandezze di tipo fondamentale elevate ciascuna ad un appropriato esponente. Esempio:

massa m (kg) = [M],
accelerazione a (m/s^2) = $[L][T]^{-2}$
$\Rightarrow$ forza (N) F=ma $[F]=[M][L][T]^{-2}$.

In maniera analoga si procede per tutte le altre entità.

TEOREMA DI BUCKINGHAM

Da un punto di vista fisico una equazione ha senso se è dimensionalmente omogenea, ossia se le dimensioni che compaiono in tutte le sue componenti sono omogenee. É possibile esprimere una qualunque relazione fisica in termini adimensionali. Una grandezza adimensionale non ha, per definizione, dimensioni. É quindi un numero puro, essendo il rapporto fra grandezze dimensionalmente omogenee. Il *teorema P*, detto anche *teorema di Buckingham*, consente di scalare la dimensionalità di un problema. Una qualunque funzione di n variabili:

$$f(P_1, P_2, ..., P_n) = 0 \tag{1}$$

può essere espressa in termini di (n-k) prodotti P:

$$f(\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_{n-k}) = 0. \tag{2}$$

Nella (2) ciascun prodotto P è una combinazione adimensionale di una n-pla arbitraria di k variabili linearmente indipendenti. É possibile perciò scrivere:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= f_1(P_1, P_2, ..., P_k, P_{k+1}) \\ \Pi_2 &= f_2(P_1, P_2, ..., P_k, P_{k+2}) \\ &... \\ \Pi_{n-k} &= f_{n-k}(P_1, P_2, ..., P_k, P_n) \end{aligned} \tag{3}$$

Nell'equazione (3) la variabile k rappresenta il numero di dimensioni fondamentali richieste per descrivere il problema. Si applica adesso il teorema P alla fluidodinamica.

Si considerino le forze agenti sulla superficie di un corpo. Esse sono proporzionali a: velocità v, densità ρ, dimensioni fisiche del corpo l, viscosità del fluido μ, velocità del suono a nel fluido considerato. É possibile quindi scrivere la relazione:

(4) $$F = f(\rho, v, l, \mu, a)$$

Riscrivendo la (4) nella forma data da (2):

(5) $$f_1(F, \rho, v, l, \mu, a) = 0$$

e considerate le seguenti adimensionalizzazioni:

- forza: $F= [M][L][T]^{-2}$
- densità: $\rho= [M][L]^{-3}$
- velocità: $v= [L][T]^{-1}$
- lunghezza caratteristica: $l= [L]$
- velocità del suono: $a= [L][T]^{-1}$
- coefficiente di viscosità dinamica: $\mu= [M][L]^{-1}[T]^{-1}$

si hanno sei variabili (F, ρ, v, l, a, μ) e tre grandezze fondamentali ([M], [L], [T]), di conseguenza ci saranno tre prodotti P. Scegliendo quale nuova terna di riferimento r, v, l, i prodotti P sono:

(6) $$\begin{aligned}\Pi_1 &= f_1(F, \rho, v, l)\\ \Pi_2 &= f_2(\mu, \rho, v, l)\\ \Pi_3 &= f_3(a, \rho, v, l)\end{aligned}$$

Il teorema di Buckingham assicura che i prodotti su riportati possono essere adimensionalizzati. Si consideri la forma $Fr^a v^b l^c$. Il prodotto P_1 in termini dimensionali ha forma:

(7) $$\left([M][L][T]^{-2}\right)\left([M][L]^{-3}\right)^a\left([L][T]^{-1}\right)^b\left([L]\right)^c$$

Gli esponenti di [M], [L] e [T] devono essere nulli. Ciò porta al seguente sistema lineare:

(8) $$\begin{aligned}&1 + a = 0\\ &1 - 3a + b + c = 0\\ &-2 - b = 0\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema (8) rispetto ad a,b e c e procedendo in maniera analoga per i prodotti P_2 e P_3 si perviene ai seguenti risultati (non si confonda la velocità del suono "a" con l'esponente "a"):

(8) $$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{F}{\rho V^2 l^2}\\ \Pi_2 &= \frac{\rho v l}{\mu}\\ \Pi_3 &= \frac{v}{a}\end{aligned}$$

I precedenti numeri sono rispettivamente il *coefficiente di portanza* (o di resistenza), il *numero di Reynolds* (Re) e il *numero di Mach* (M). Possono essere determinati altri numeri adimensionali quali il *numero di Froude*, di Prandtl, etc.
I parametri adimensionali possono essere convenientemente sfruttati per analizzare il moto dei fluidi. Il numero di Mach, ad esempio, rapporta la velocità di un flusso rispetto a quella del suono nel fluido considerato. Quando la velocità del flusso è pari a quella del suono ci si trova in condizioni critiche (il famoso muro del suono). In termini adimensionali, le condizioni critiche vengono raggiunte in corrispondenza di M = 1. La velocità del suono dipende dalla temperatura, però da un punto di vista adimensionale, il numero di Mach sarà sempre unitario in corrispondenza delle condizioni critiche indipendentemente dalla temperatura. Con questo esempio è chiarita la utilità delle grandezze adimensionali in ambito fluidodinamico.